EPITA

Mathématiques

Examen S1B2 ARITH

durée : 1 heure 30

Janvier 2026

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par règle de trois.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 4 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : autour des nombres premiers (5 points)

Soient $a = 4500$ et $b \in \mathbb{N}$.

1. Décomposer a en produit de facteurs premiers.

   .....
   .....
   .....
   .....

2. On suppose que : $\forall\, d \in \mathbb{N}^*,\ d \mid b \iff d = 2^i \times 3^j \times 5^k \times 7^l$ avec $i \in [\![0,3]\!]$, $j \in [\![0,1]\!]$, $k \in [\![0,2]\!]$ et $l \in [\![0,2]\!]$.

   (a) Combien b a-t-il de diviseurs positifs ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) Donner la décomposition en facteurs premiers de b. Justifier.

   .....
   .....
   .....
   .....

   (c) Calculer $a \wedge b$. Vous expliquerez comment vous l'obtenez.

   .....
   .....
   .....
   .....

   (d) Donner la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel $c \geq 200$ tel que $a \wedge c = 90$. Expliquez votre raisonnement.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 2 : équation diophantienne (7 points)

On considère l'équation $(E) : 102x + 27y = 6$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Via l'algorithme d'Euclide, trouver $102 \wedge 27$. En déduire que (E) admet des solutions.

2. Via la question précédente, trouver une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

3. Trouver toutes les solutions de (E). Vous devez faire un raisonnement détaillé et ne pas parachuter la réponse.

Exercice 3 : autour du cours (10 points)

1. Soient $(a, b, n) \in \mathbb{Z}^3$. En utilisant les quantificateurs, montrer que si $n \mid a$ et $n \mid b$ alors $\forall\, (k, k') \in \mathbb{Z}^2$, $n \mid ka + k'b$

2. Théorème de Bézout

   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ non nuls. Énoncer les deux versions du théorème de Bézout.

   (b) **Application** : soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \wedge b = 1$. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur commun de $3a$ et de $3b$.

      i. Montrer que $d \mid 3$.

      ii. En déduire que $3a \wedge 3b = 3$. Justifier.

3. Lemme de Gauss

   (a) Énoncer le lemme de Gauss.

   (b) Soient a, b et c trois entiers non nuls. On suppose que $a \mid c$, $b \mid c$ et $a \wedge b = 1$.

      i. En traduisant les deux divisibilités $a \mid c$ et $b \mid c$, montrer qu'il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ka = k'b$. En déduire que a divise k'.

ii. En déduire que $ab \mid c$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 4 : congruence (8 points)

Les deux questions sont indépendantes. La fin de la deuxième question est un bonus.

1. Énoncer les deux versions du petit théorème de Fermat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

.....
.....
.....
.....
.....

(a) **Application 1** : soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est un multiple de p.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(b) **Application 2** : soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de $N = 3^{12n} + 18^{37}$ par 7.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

[Tournez la page]

2. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Remplir le tableau suivant modulo 7 et en déduire les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de n^2 par 7.

n [7]	0	1	2	3	4	5	6
n^2 [7]							

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. À l'aide d'un tableau à double entrée, donner les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 7 en fonction de ceux de x^2 et y^2.

(c) **(Question bonus)** En déduire que que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de l'équation $x^2 + y^2 = 7^{2026}$ alors 7 divise x et 7 divise y.